



TITLE:

ゆっくりと動く天体を過ぎる粘性  
流(ナビエ・ストークスの方程式の  
解)

AUTHOR(S):

桜井, 健郎

---

CITATION:

桜井, 健郎. ゆっくりと動く天体を過ぎる粘性流(ナビエ・ストークスの  
方程式の解). 数理解析研究所講究録 1983, 477: 91-100

ISSUE DATE:

1983-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103337>

RIGHT:

## ゆっくりと動く天体を過ぎる粘性流

京大 工学部 桜井健郎

(Sakurai Takeo)

はじめに

研究会の席でいみじくも川口光年教授が言われたように、  
“天体とは大きいもの、速いもの、粘性などきく筈のないもの。”というのが常識である。しかし、世の中では常識を超えたものを評して“天文学的”と言う。論より証拠、第1図をごらん願いたい。この図は池内氏と富坂氏の描かれたものであるが (Ikeuchi and Tomisaka 1981)、代表長3万光年の銀河が秒速100 kmで銀河集団内を運動する場合についてレイノルズ数、マッハ数及び連続体理論の適用限界を示したものである。ごらんのように、天体の運動には、“天文学的にも”粘性の効果をもとに受けるものがある。美しい星空に、その昔 Stokes が情熱を燃やしたのと同じような流れ模様が壮大なスケールで姿を見せているのである。ここでは、そのような流れの例として、重力を及ぼす球を過ぎる粘性、熱伝導性の

理想気体の定常ストークス流れを考える。

このような流れは天体を過ぎる気体流れの特殊例に過ぎない。天体を過ぎる気体流れの問題は、特に物質集積（物質降着という言い方もあるが、降着装置を思い出してしまうので、飛行機屋には気に入らない）に関連して、天文学の分野で広く調べられている（末尾の文献参照の事）。しかし、何分にも大きな問題なので、解らない所が多い。ここで述べるような特殊例は一つの極限を与えるとともに、数値モデルの比較規準にもなるものと思われる。

### 基礎方程式

重力を及ぼす球（天体）のまわりを過ぎる粘性，熱伝導性の理想気体の定常ストークス流れを考えよう。球の中心を中心とし、無限上流での流れの向きを  $\theta = 0$  とするような球座標を用いると、無次元化された基礎方程式は次のようになる：

$$(1) \quad 0 = \frac{\partial(\rho u r^2 \sin\theta)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho V r \sin\theta)}{\partial \theta} ,$$

$$(2) \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{g_0 \rho}{r^2} + \nu_0 F_r ,$$

$$(3) \quad 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu_0 F_\theta ,$$

$$(4) \quad 0 = \frac{\partial}{\partial r}(\kappa r^2 \sin\theta \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\kappa \sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}) ,$$

$$(5) \quad p = \rho T .$$

上の式には通常の記号を用いている。(2) 及び (3) の  $F_r$  及び  $F_\theta$  は夫々粘性力の  $r$ -及び  $\theta$ -成分である。上の式は次元のある元の式に変数変換：

$$(6) \quad \begin{cases} r = \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}_s} , & u = \frac{\tilde{q}_r}{\tilde{u}_\infty} , & V = \frac{\tilde{q}_\theta}{\tilde{u}_\infty} , \\ \rho = \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_s} , & p = \frac{\tilde{p}}{\tilde{p}_s} , & T = \frac{\tilde{T}}{\tilde{T}_s} , \\ \mu = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\mu}_s} , & \kappa = \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\kappa}_s} , \end{cases}$$

を適用して得られる。そして、無次元のパラメーターは次のように表わせる：

$$(7) \quad v_0 = \frac{\tilde{\mu}_s \tilde{u}_\infty}{\tilde{r}_s \tilde{p}_s} = \frac{\gamma M_u^2}{Re} , \quad g_0 = \frac{\tilde{G} \tilde{M} \tilde{\rho}_s}{\tilde{r}_s \tilde{p}_s} = \gamma M_G^2 ,$$

$$(8) \quad \begin{cases} Re = \frac{\tilde{\rho}_s \tilde{r}_s \tilde{u}_\infty}{\tilde{\mu}_s} , & M_u = \frac{\tilde{u}_\infty}{\tilde{a}_s} , & M_G = \frac{\tilde{u}_{es}}{\tilde{a}_s} , \\ \tilde{u}_{es} = \left( \frac{\tilde{G} \tilde{M}}{\tilde{r}_s} \right)^{\frac{1}{2}} , & \tilde{a}_s = \left( \frac{\gamma \tilde{p}_s}{\tilde{\rho}_s} \right)^{\frac{1}{2}} . \end{cases}$$

但し、添字  $s$  及び  $\infty$  は、夫々、球面及び無限上流を示す。また  $\tilde{M}_s$  は球の質量を表わし、 $\tilde{u}_{es}$  は球面上での脱出速度に相当する。

簡単の為、今後は球の質量は一樣であるとす、 $\mu$  及び  $\kappa$  は

$$(9) \quad \mu = \kappa = n T^{n-1}$$

の形を持つものとする。

境界条件は

$$(10) \quad r \rightarrow \infty \quad u \rightarrow \cos\theta, \quad V \rightarrow -\sin\theta, \quad T \rightarrow T_\infty,$$

$$(11) \quad r = 1 \quad u = V = 0, \quad T = 1,$$

である。

### 解法のあらまし

(1)~(5)を(10)及び(11)の下で解く境界値問題は、(9)の簡単化の下で、下記の形の解を持つ：

$$(12) \quad \begin{cases} u = u_0(r) \cos\theta, \\ V = V_0(r) \sin\theta, \\ p = p_0(r) + p_1(r) \cos\theta, \\ \rho = \rho_0(r) + \rho_1(r) \cos\theta, \\ T = T_0(r). \end{cases}$$

(12)を(1)~(5), (10)及び(11)に代入すると、常微分方程式の境界値問題になる。その問題は標準的な手法を用いて解く事が出来る。

### 結果

計算は種々な場合について行なったが、詳しい事は現在投稿中なので、また、流れの性質は十分に論ずる事が出来るので、ここには等温の場合( $T_\infty=1$ )の抵抗の $g_0$ 依存(第2図)及び $g_0=6$ ,  $K_\infty=0.5$ ,  $n=1$ の場合の流れ模様(第3図)のみ

を掲げる。

抵抗は圧力抵抗  $D_P$ , まさつ抵抗  $D_S$ , 重力抵抗  $D_G$  の3つの部分から成り立っている:

$$(13) \quad D_T = \tilde{D}/\tilde{D}_{\text{STOKES}} = D_P + D_S + D_G,$$

$$(14) \quad D_{\text{STOKES}} = 6\pi\tilde{\mu}_S\tilde{r}_S\tilde{u}_\infty,$$

$$(15) \quad \begin{cases} D_P = -\frac{2}{9v_0}p_1(1), \\ D_S = -\frac{4}{9}\left.\frac{\partial V_0}{\partial r}\right|_{r=1}, \\ D_G = \frac{2g_0}{9v_0}\int_1^\infty \rho_1 dr. \end{cases}$$

第2図に見るように、 $g_0$ の小さい値に対しては  $D_P + D_S$  が  $D$ の主要な部分を占め、 $D_G$ は負の値を取る。 $g_0$ がある値を越えると  $D_P$ は減り始め  $D_G$ は増し始める。そして  $g_0$ が大きくなると  $D_G$ が主要な部分を占め  $D_P$ と  $D_S$ は共に負の値を取る。この傾向は等温の場合に限らず、 $K_\infty$ 及び  $n$ の他の組み合わせに対して共通のものである。所で、 $D_P$ と  $D_S$ が共に負である事は流れが球面近くで逆に流れている事を予想させる。事実、 $g_0=6$ ,  $n=1$ の場合の流れ模様(図3)はそのような逆流のある事をはっきりと示している。ここで興味があるのは、(12)から解るように、逆流域が元々の球と同心の球状域をなしている事である。図3のような流れでは、球体は丁度蛙の卵のような感じで逆流の“ゼラチン”に包み込まれて

いる。

おわりに。

以上のように、重力が関与して来るとストークス流れの中にも逆流域が出来る。その原因を一口で言う事は難しいが、御婦人方のまわりをぶらぶら通り過ぎる男子の集団の行動とここでのストークス流れの行動に多くの類似点のある事を考えると少しは解ったような気分になれる。

最後にパラメターの動かし方等について種々と議論して下さった林忠四郎先生、図1の載った論文をお送り下さった池内了さんに心から感謝する。

## 文献

### (1) 先づ池内さん達の論文は

Ikeuchi, S. and Tomisaka, K.,

Astrophys. Space Sci. 80, 483-500 (1981)

である。

### (2) 物質集積等天体を過ぎる流れについての代表的なものは下記の如くである：

1) Bondi, H. and Hoyle, F.,

MN 104, 273-282 (1944)

- 2) Gisler, G.R., Astron. Ap. 51, 131-150 (1976)
- 3) Hoyle, F. and Lyttleton, R.A.,  
Proc. Cambr. Phil. Soc. 35, 405-415 (1939)
- 4) Hunt, R., MN 154, 141-165 (1971)
- 5) Lea, S.M. and De Young, D.S.,  
Ap. J. 210, 647-665 (1976)
- 6) Lyttleton, E.A., MN 160, 255-270 (1972)
- 7) Ruderman, M.A. and Spiegel, E.A.,  
Ap. J. 165, 1-15 (1971)
- 8) Yabushita, S.,  
MN 182, 371-380 (1978)  
MN 183, 459-472 (1978)



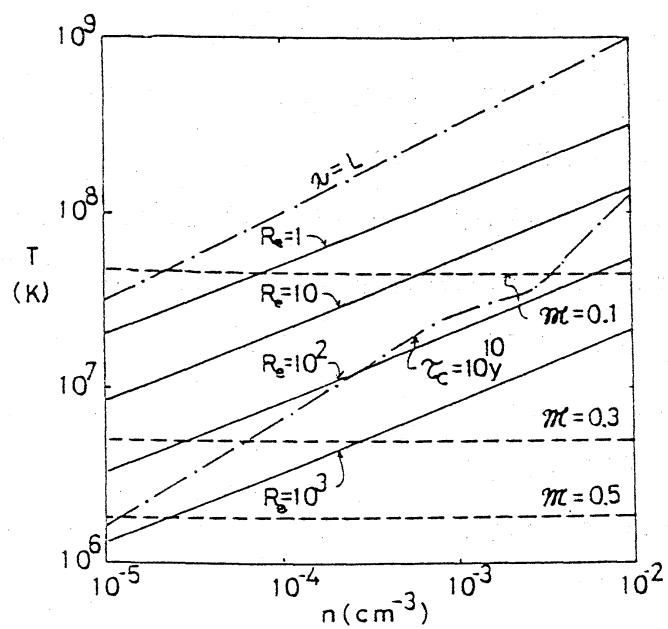


図 1

銀河の運動についてとったレイノルズ数 ( $Re$ ),  
 マッハ数 ( $M$ ) 及び 流体力学の適用限界 ( $\lambda=L$ ).  
 [池内-富坂による]

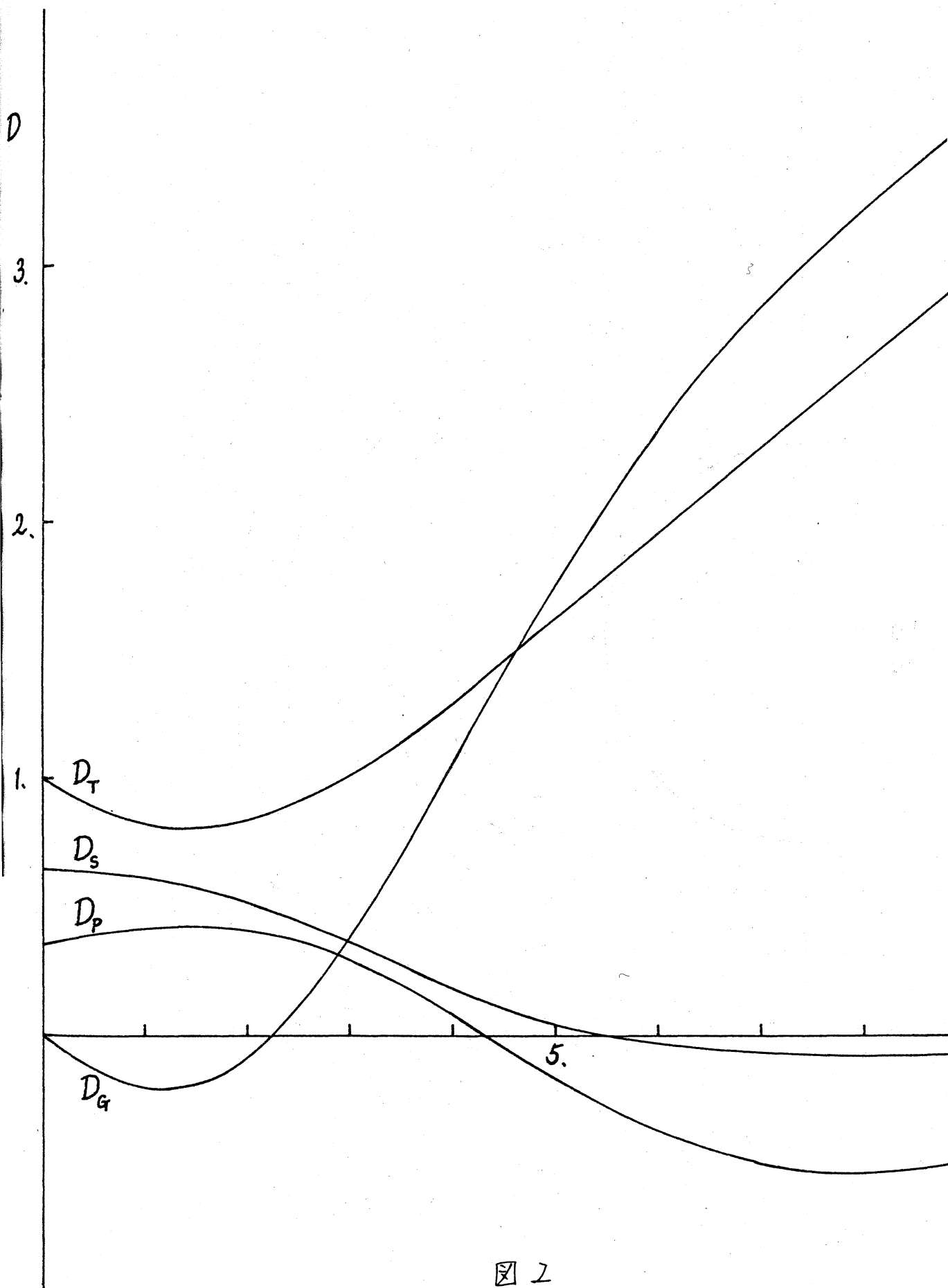


图 2

100

3

